

**TANGENCIAS, INVERSIÓN, CÓNICAS (TANG Y PUNTOS)**  
**ESFERA E INTERSECCIÓN DE FIGURAS PLANAS- RECTAS- ESFERAS/POLIEDROS**  
**SDO DIRECTO**  
**ISOMÉTRICA-CABALLERA**  
**ACOTACIÓN Y SECCIÓN**

**TANGENCIAS:**  
**POTENCIA, EJE RADICAL Y CENTRO RADICAL**  
**EJERCICIOS BÁSICOS**  
**EJERCICIOS COMPLEJOS**

PÁGINAS SUGERIDAS PARA SU ESTUDIO:

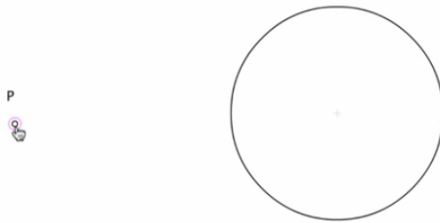
<http://www.10endibujo.com/polar-centro-y-eje-radical/>

<https://www.youtube.com/watch?v=JN2udn2HVwU>

[http://www.laslaminas.es/images/descargas/transformaciones\\_geometricas/inversion.pdf](http://www.laslaminas.es/images/descargas/transformaciones_geometricas/inversion.pdf)

**POTENCIA:** <https://www.youtube.com/watch?v=ywvdfFpUA>

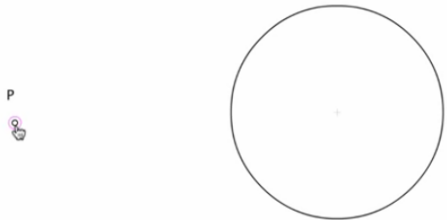
DEF: Es una constante K tal que  $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = K$



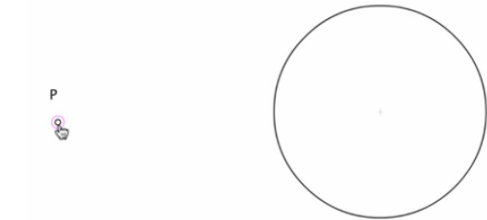
2

Tangencia:  $PT \cdot PT' = PT^2$

**Aplicación Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto P.**



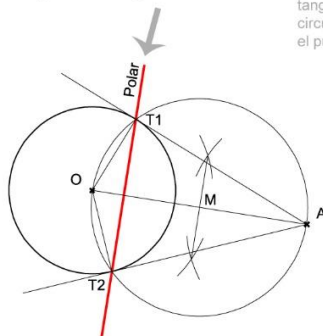
Solución aplicando Potencia



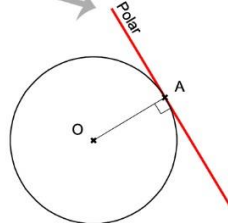
Solución aplicando Homotecia

*(Recta Polar: es la recta que contiene todos los conjugados armónicos separados de A por los de intersección con las distintas secantes trazadas por A.)*

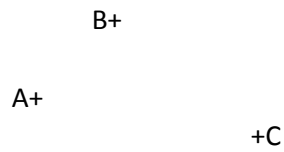
**M**ediatriz de A-O. Circunferencia con centro en M y radio M-A da los puntos de tangencia. La polar es la recta que une los puntos de tangencia



**P**olar es la recta tangente a la circunferencia por el punto A.

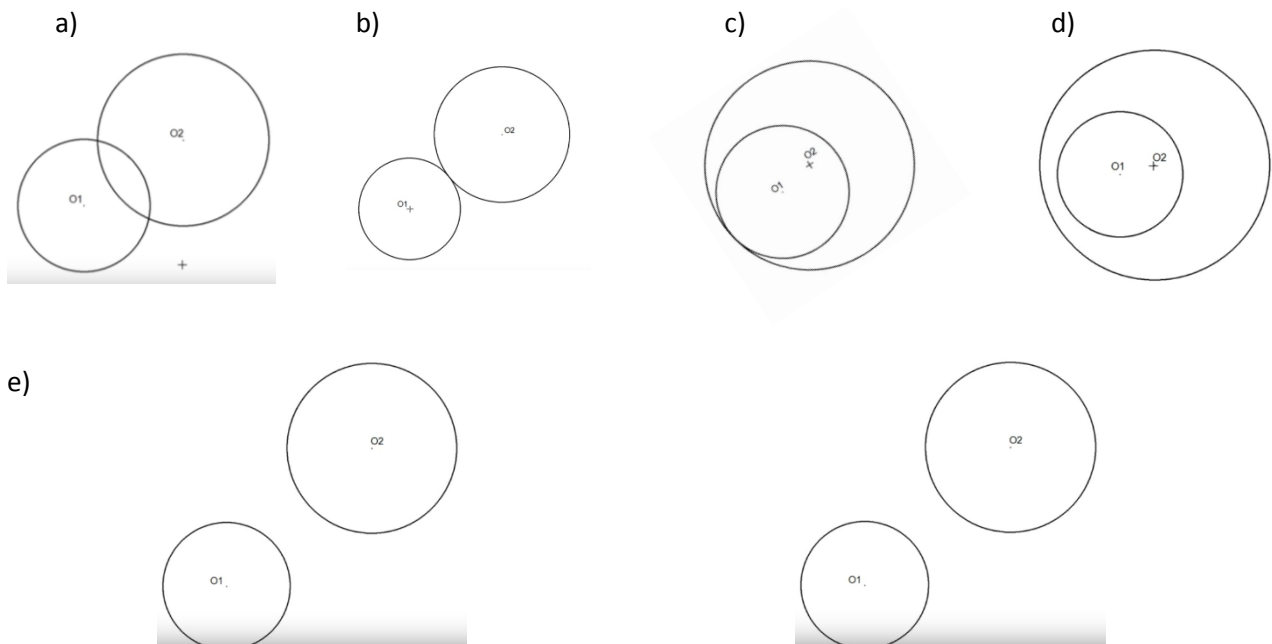


Antes de continuar recordemos, además de este último ejercicio, el ejercicio “Hallar la circunferencia que pasa por 3 puntos no alineados”: Unimos los puntos y en la unión de mediatrices estará el centro de la circunferencia buscada.



**EJE RADICAL:** Es el lugar geométrico de los puntos cuya potencia respecto a las **dos circunferencias** es la misma. El eje es perpendicular a la recta que une los centros, desde cualquiera de sus puntos podemos trazar un arco que pasará por los puntos de tangencia en todas las circunferencias.

*EJE SEGÚN POSICIONES RELATIVAS DE LAS CIRCUNFERENCIAS*

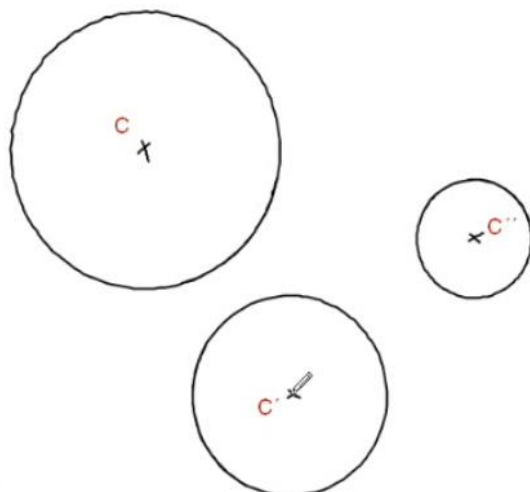


MÉTODO 1 Circ. Aux.

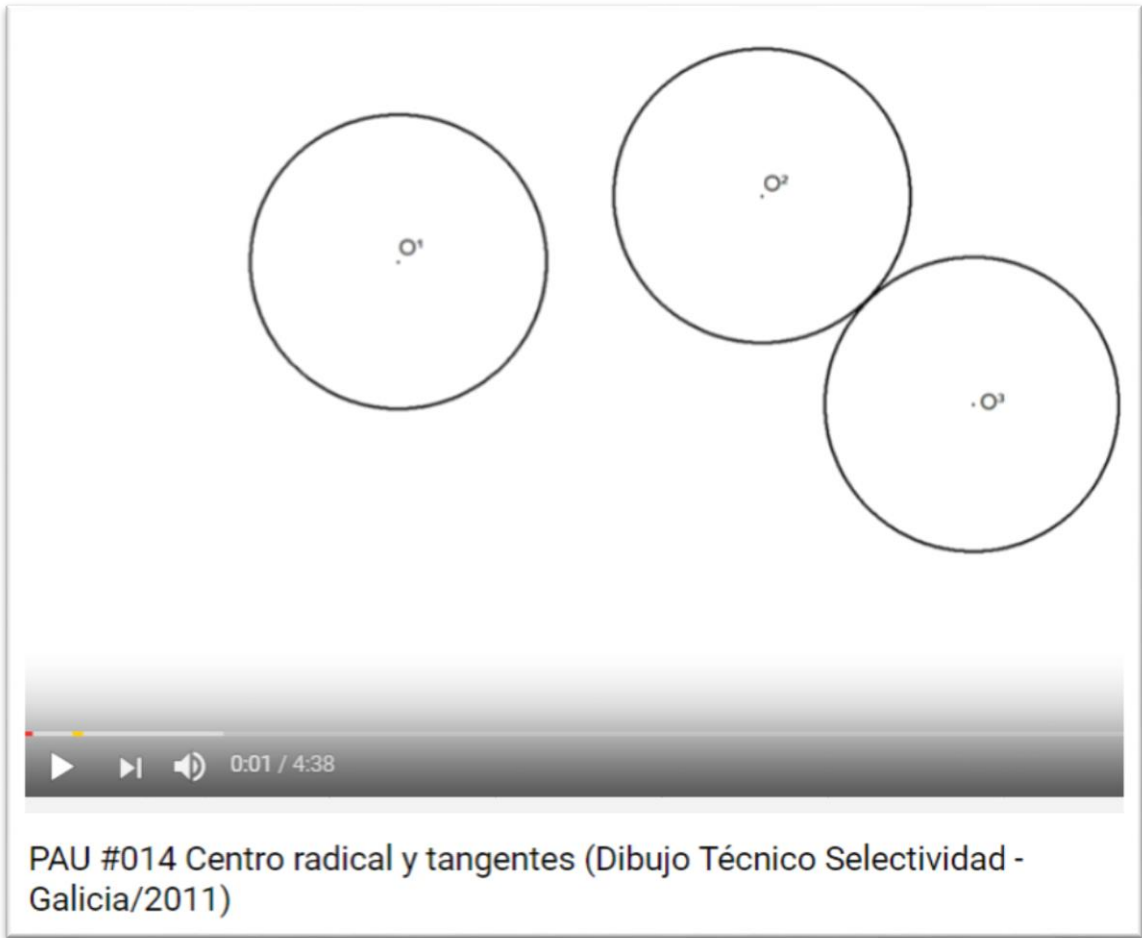
MÉTODO 2 A partir de rectas Tang.  
(Potencia u Homotecia)

**CENTRO RADICAL:** Es el punto cuya potencia respecto a las **tres circunferencias** es la misma.

**ii Su distancia hasta los puntos de tangencia es igual en todas las circunferencias implicadas!!**



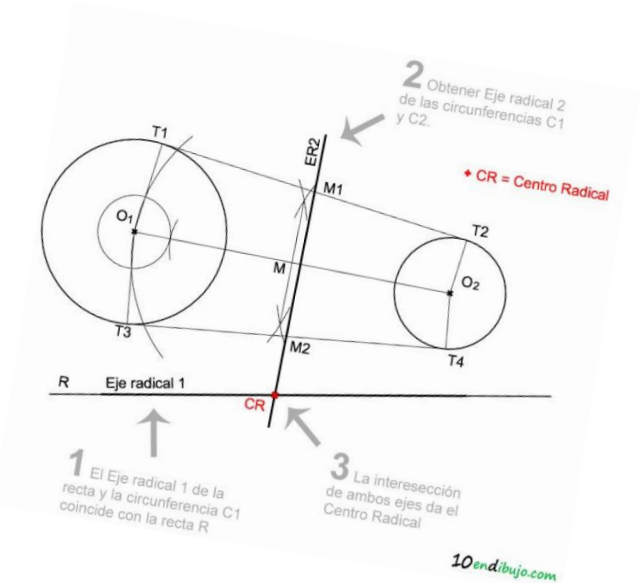
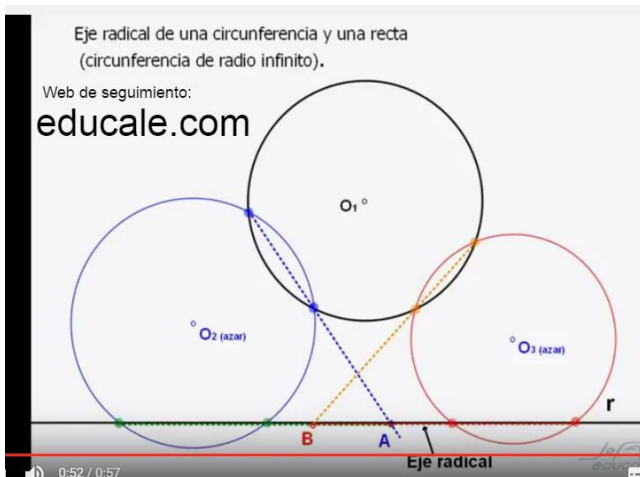
Aplicación:1 Eje radical para hallar Centro Radical para hallar Rectas Tangentes a circunferencias dadas(Helados)



<https://www.youtube.com/watch?v=O7O5OF4WM8A>

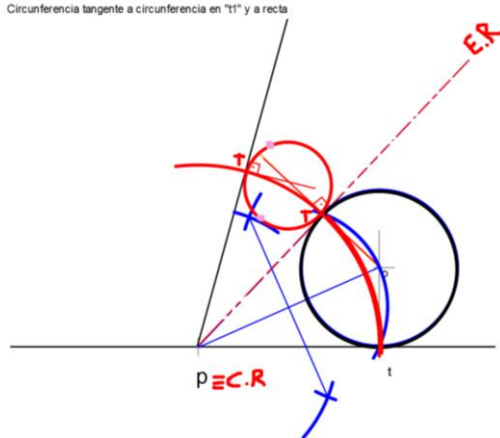
EJE Y CENTRO RADICAL DE UNA CIRCUNFERENCIA Y UNA RECTA: Es el punto cuya potencia respecto a la circunferencia y a la recta es la misma. Coincide siempre con la propia recta.

<https://www.youtube.com/watch?v=3BbylkOb5ig>



# Mapa de Tangencias

- Una circunferencia tangente a dos rectas tiene el centro a igual distancia de ellas (bisectriz), esta distancia es e radio de la circunferencia tangente.
- Los puntos de tangencia entre circunferencias están en la recta que une sus centros.
- El eje radical de dos circunferencias, encuentro los puntos a igual distancia de las tangentes a una circunferencia



## ESQUEMA RESUMEN DE PROCEDIMIENTOS POR POTENCIA

Sitio del esquema: <http://trazoide.com/blog/metodo-para-resolver-tangencias-mediante-potencia/>

Vídeo explicativo del esquema: <https://www.youtube.com/watch?v=dpKV0bTskWo&feature=youtu.be>

### MÉTODO PARA HALLAR CIRCUNFERENCIAS TANGENTES MEDIANTE POTENCIA

¿Conocemos la recta que contiene al centro de la circunferencia buscada?

<p>¿Tenemos dos puntos por los que pasa?</p>	<p>¿Tenemos dos rectas tangentes?</p>	<p>¿Tenemos una recta tangente y el punto de tangencia en ella?</p>	<p>¿Tenemos una circunferencia tangente y el punto de tangencia en ella?</p>
<p>Hallar la mediatriz de los dos puntos</p>	<p>Hallar la bisectriz de las dos rectas</p>	<p>Dibujar la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia</p>	<p>Unir el centro con el punto de tangencia</p>

¿Tenemos tres elementos que serán tangentes? Hallar el simétrico respecto de la línea de los centros

Dibujar dos ejes radicales

Antonio Castilla

<p>Si debe pasar por dos puntos, unirlos y es un eje radical</p>	<p>Si debe pasar por un punto, perpendicular a la recta de los centros por el punto y es un eje radical</p>	<p>Si hay dos circunferencias, hallar el eje radical por los métodos normales</p>	<p>Si hay una circunferencia y un punto, dibujar otra con centro en la recta de los centros pasando por el punto y cortando a la otra. Hallar el eje radical por los métodos normales</p>
<p>Si una recta es tangente, la recta es un eje radical</p>			

Donde se cortan los dos ejes radicales es el centro radical

¿Tenemos algún punto de tangencia?

<p>¿Hay una circunferencia? Hallar la recta tangente desde el centro radical</p>	<p>¿Hay un punto por el que pasará? Dibujar una circunferencia con centro en la recta de los centros y radio hasta el punto. Hallar la recta tangente desde el centro radical</p>
--	---

Arco desde el centro radical hasta el punto de tangencia. Donde corten son los puntos de tangencia

Hallar los centros

<p>Si el punto de tangencia está en la recta hacer una perpendicular hasta la recta de los centros</p>	<p>Si el punto de tangencia está en la circunferencia unir con el centro hasta la recta de los centros</p>
--	--

Trazar las circunferencias desde los centros hasta los puntos de tangencia.

## EJERCICIOS

ESTOS EJERCICIOS SE VERÁN MÁS ADELANTE. AQUÍ SE EXPLICA CÓMO APLICAR ESQUEMA ANTERIOR

### TANGENCIAS POR POTENCIA, MÉTODO Y VÍDEO APLICANDO MÉTODO PASO A PASO

Circunferencia tg a una recta y que pase por dos puntos

[https://www.youtube.com/watch?v=3Z\\_42mo4z5o](https://www.youtube.com/watch?v=3Z_42mo4z5o)

Circunferencias tangentes entre sí tg

<https://www.youtube.com/watch?v=dpKV0bTskWo&feature=youtu.be>

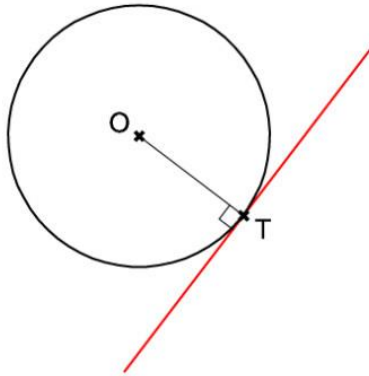
circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasan por dos puntos

<https://www.youtube.com/watch?v=kpgeiwvu1rk>

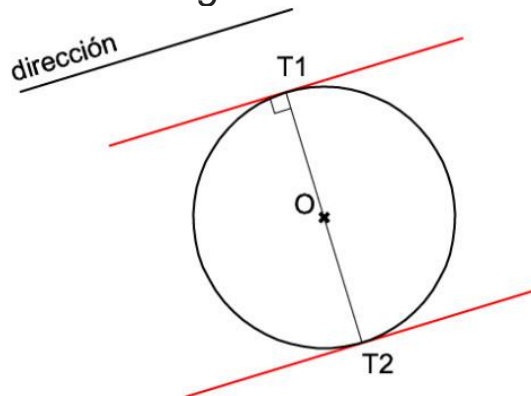
## 1. Rectas tangentes a circunferencia

1.1. Recta tangente a circunferencia pasando por un punto de tangencia  $T$

1.2. Rectas tangentes a circunferencia según una dirección de tangencia



Recta tangente a circunferencia conocido el punto de tangencia



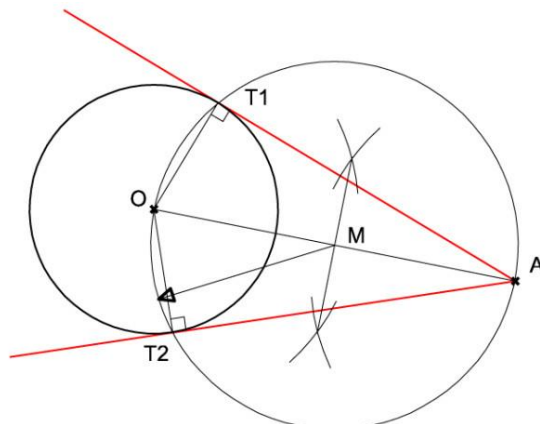
Rectas tangentes a circunferencia conocida la dirección

10endibujo.com

1.3. Recta tangente a circunferencia pasando por punto exterior  $A$

La polar sería la recta de unión de ambos puntos de tangencia, pero en este caso no la necesitamos.

**M**ediatriz del segmento  $A-O$ . Circunferencia que pasa por  $O$  y  $A$  con centro en  $M$  determina los puntos de tangencia.

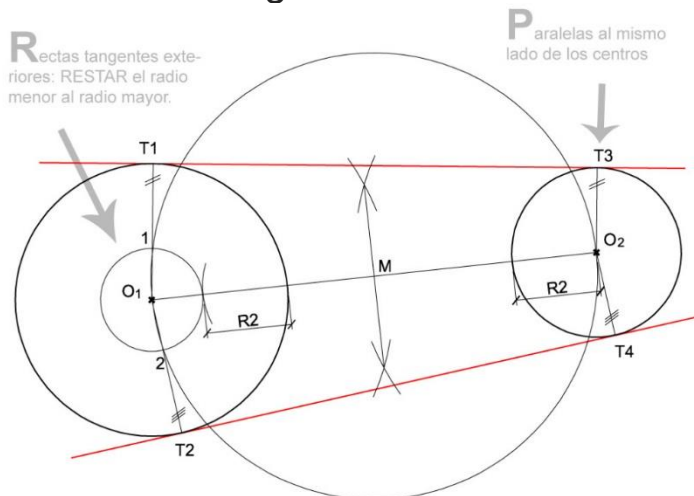


Rectas tangentes a una circunferencia por un punto exterior

10endibujo.com

## 2. Rectas tangentes a 2 circunferencias

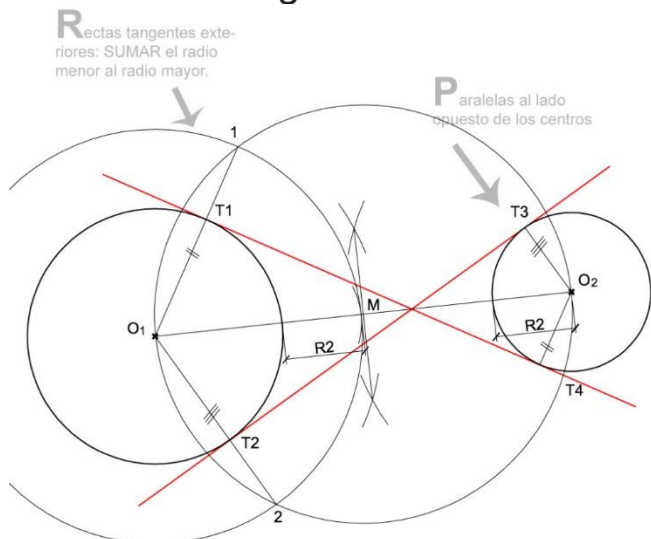
### 2.1. Rectas tangentes exteriores a 2 circunferencias



Rectas tangentes exteriores a 2 circunferencias

10endibujo.com

### 2.2. Rectas tangentes interiores a 2 circunferencias

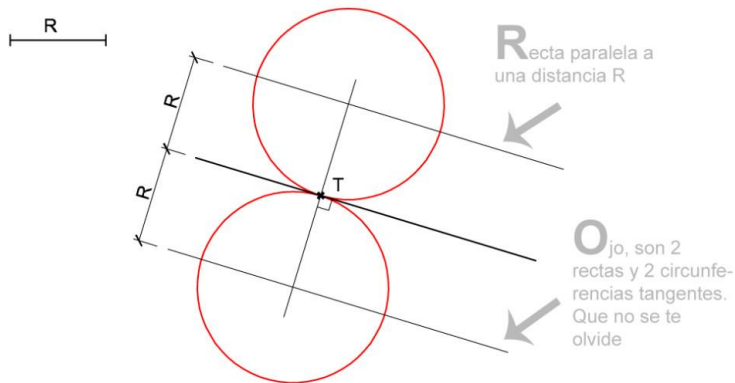


Rectas tangentes interiores a 2 circunferencias

10endibujo.com

## 3. Circunferencias tangentes a recta

## Dados el punto de tangencia y el radio



Circunferencias tangentes a una recta, conocido el punto de tangencia

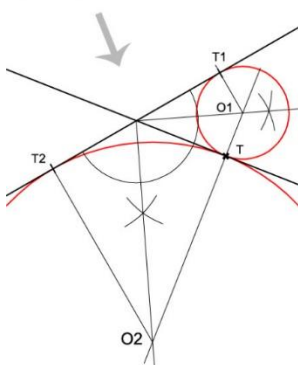
10endibujo.com

## 4. Circunferencias tangentes a 2 rectas

### 4.1. Circunferencias tangentes a 2 rectas por un punto de tangencia

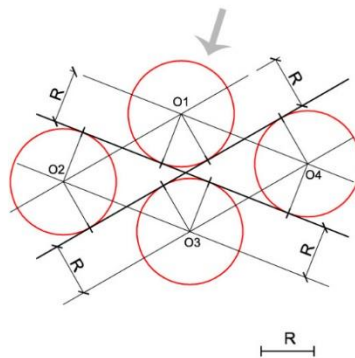
### 4.2. Circunferencias tangentes a 2 rectas dado el radio

**B**isectriz y perpendicular por el punto  $T$ . No te olvides de las 2 soluciones



Circunferencias tangentes a 2 rectas conocido el punto de tangencia  $T$

**P**aralelas a ambos lados de cada recta a una distancia  $R$ .

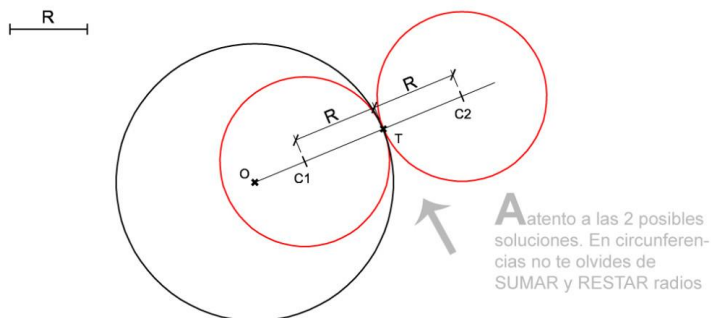


Circunferencias tangentes a 2 rectas conocido el radio

10endibujo.com

## 5. Circunferencias tangentes a otra dada

### Dados el punto de tangencia $T$ y el radio $R$



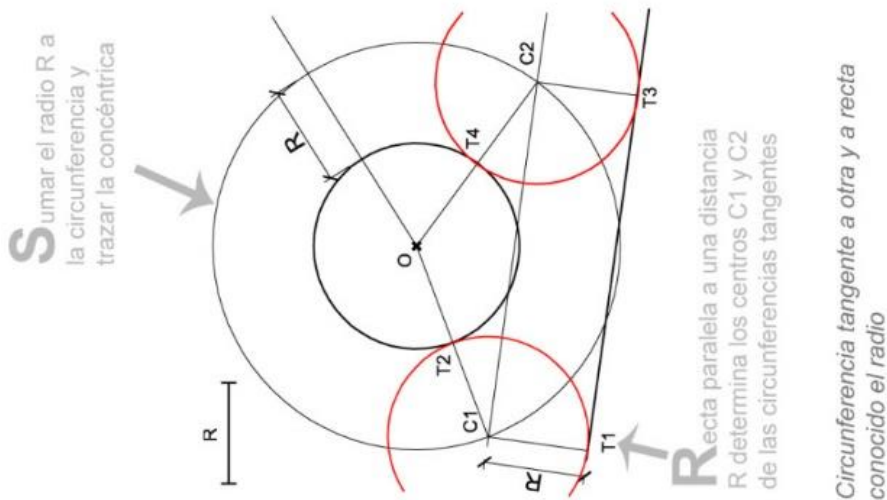
Circunferencias tangentes a otra dada conocido el radio

10endibujo.com



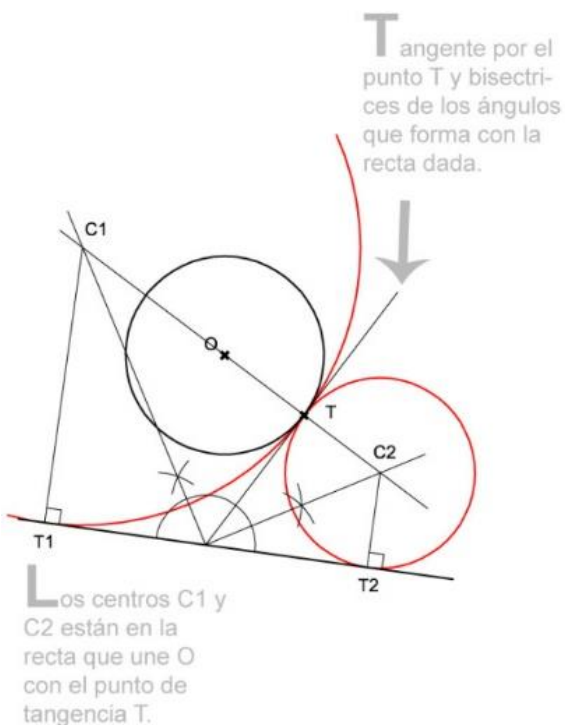
## 6. Circunferencias tangentes a recta y circunferencia.

### 6.1. Circunferencias tangentes a recta y circunferencia dado el radio $R$ .



### 6.2. Circunferencias tangentes a recta y circunferencia dado el punto de tangencia $T$ sobre la circunferencia

Une el centro de la circunferencia con el punto  $T$  y traza la recta tangente por dicho punto. Prolonga esta tangente hasta que corte a la recta dada. Halla la bisectriz de los ángulos formados por dicha intersección. Los puntos de intersección de las bisectrices con la recta  $O-T$  definen los centros de las circunferencias tangentes.

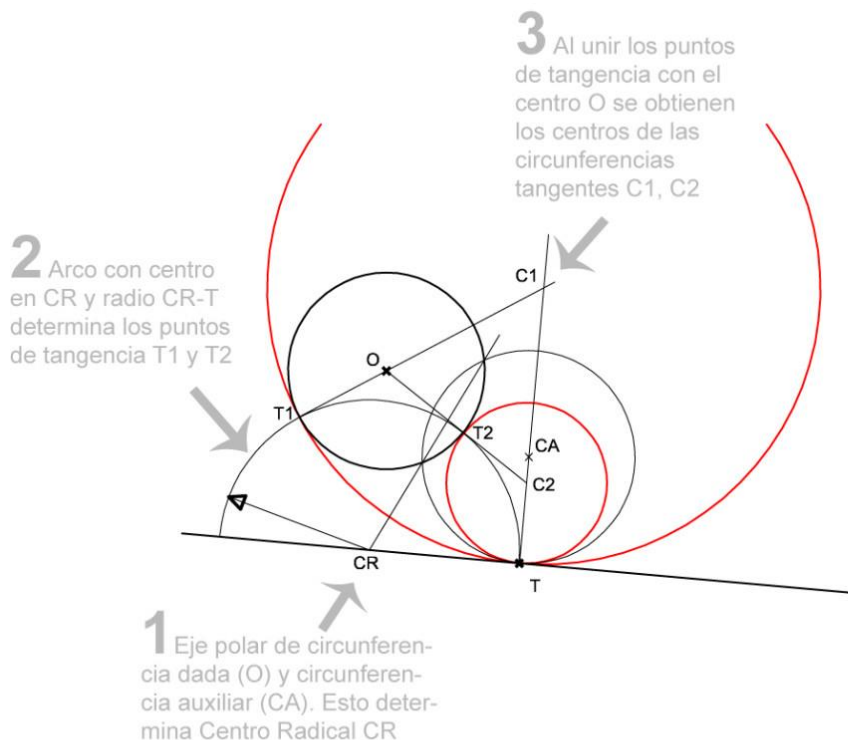


Circunferencia tangente a otra y a recta conocido el punto de tangencia

### 6.3. Circunferencias tangentes a recta y circunferencia dado el punto de tangencia $T$ sobre la recta

Aquí necesitamos aplicar los conocimientos adquiridos en el artículo sobre centro radical. Tenemos que hallar el Centro Radical de 2 circunferencias y una recta. La circunferencia que nos falta es una auxiliar que será tangente a la recta en el punto  $T$  dado.

- Traza una recta perpendicular a la recta dada por el punto  $T$ . En esa recta estarán los centros de las circunferencias tangentes.
- Halla el eje radical de la circunferencia dada y la recta. Como vimos, este eje radical coincide con la propia recta, por lo que no tienes que hacer nada =)
- Halla el eje radical de la circunferencia dada con la circunferencia auxiliar de centro  $CA$ . Para simplificar el dibujo es recomendable que la circunferencia auxiliar que utilices sea secante a la dada, puesto que los puntos de intersección definirán el eje radical.
- El Centro Radical  $CR$  se encuentra, por tanto, en el punto de corte de los ejes radicales anteriores.
- Con centro en el Centro Radical ( $CR$ ) y radio  $CR-T$ , traza un arco que corte a la circunferencia dada en los puntos de tangencia  $T_1$  y  $T_2$ .
- Hallar los centros de las circunferencias tangentes. Para ello, une los puntos de tangencia  $T_1$  y  $T_2$  con el centro de la circunferencia dada y prolonga dichas rectas hasta que corten a la perpendicular por  $T$  en los puntos  $C_1$  y  $C_2$ .

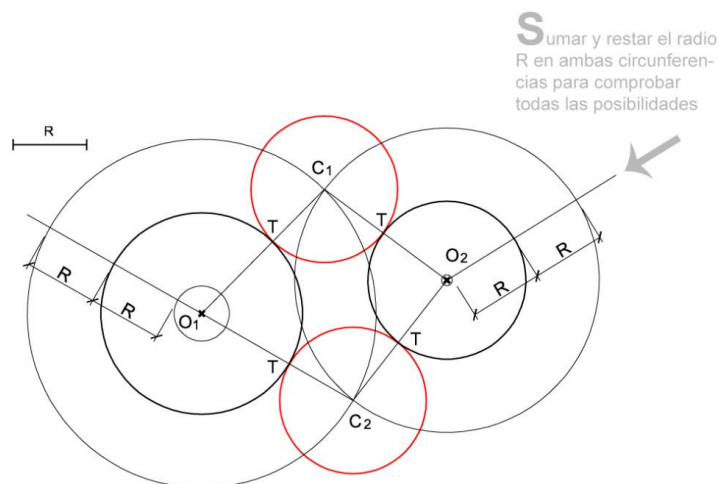


Circunferencias tangentes recta y circunferencia, conocido el punto de tangencia  $T$  sobre la recta

## 7. Circunferencias tangentes a 2 circunferencias

### 7.1.1. (Suma radios) Circunferencias tangentes a 2 circunferencias dado el radio $R$

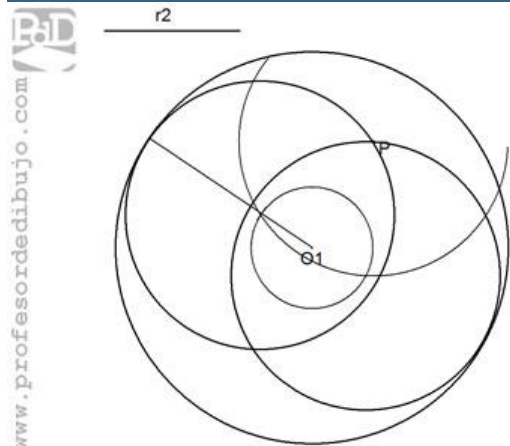
En este caso nos salen 2 soluciones, sólo las circunferencias tangentes exteriores.



Circunferencias tangentes a otras 2 conocido el radio

10endibujo.com

### 7.1.2. (resta radios) Circunferencia tangente a otra circunferencia, conocido el radio y un punto perteneciente a ella (Tangente interior).



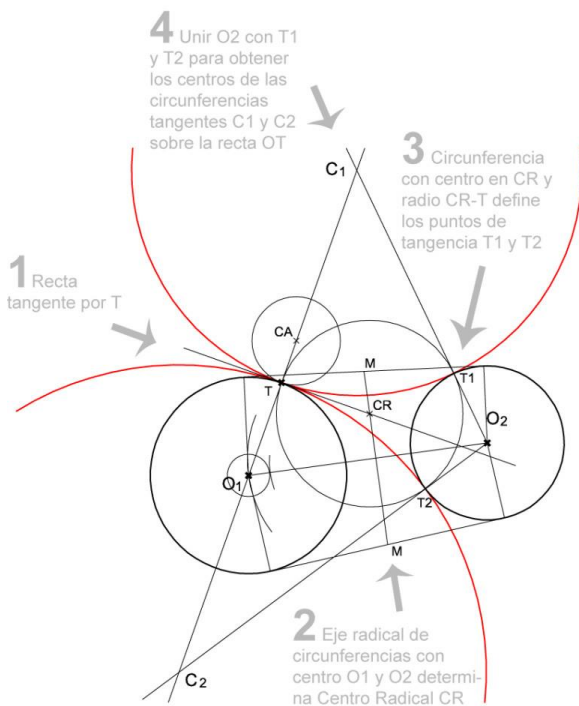
### 7.2. Circunferencias tangentes a 2 circunferencias dado el punto de tangencia $T$ sobre una de ellas

Aquí volvemos a necesitar hallar el Centro Radical de las dos circunferencias dadas y una tercera auxiliar que es tangente a la dada en el punto  $T$ .

- Unir el punto de tangencia  $T$  con el centro de la circunferencia  $O_1$  al que pertenece. Sobre esta recta se encontrarán los centros de las circunferencias tangentes.
- El Eje Radical de la circunferencia auxiliar con centro en  $CA$  y la circunferencia de centro  $O_1$  es la recta tangente por el punto  $T$ .
- Halla el Eje Radical de las 2 circunferencias dadas según el ejercicio que vimos en el artículo anterior. (**Truco**: si consigues hacer una circunferencia auxiliar que sea

tangente a la circunferencia de centro  $O_1$  por el punto  $T$  y secante a  $C_2$ , el eje radical de la circunferencia auxiliar y  $C_2$  es muy sencillo. Sólo tienes que unir los puntos de corte. En este caso no he podido hacerlo, sale demasiado grande la circunferencia)

- El Centro Radical  $CR$  se encuentra en la intersección de los Ejes Radicales. Traza un arco con centro en el Centro Radical  $CR$  y radio  $CR-T$  que cortará a la otra circunferencia en los puntos de tangencia  $T_1$  y  $T_2$ .
- Une  $T_1$  y  $T_2$  con  $C_2$  y prolonga las rectas hasta cortar a la recta  $C_1-T$ , para obtener los centros de las circunferencias tangentes.
- Dibuja las circunferencias y ¡listo!



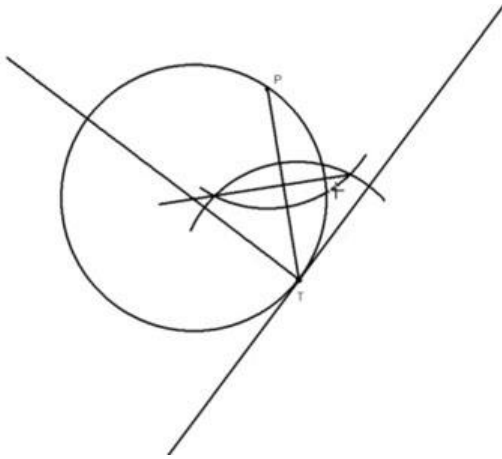
Circunferencias tangentes a otras dos, conocido el punto de tangencia  $T$  sobre una de ellas

10endibujo.com

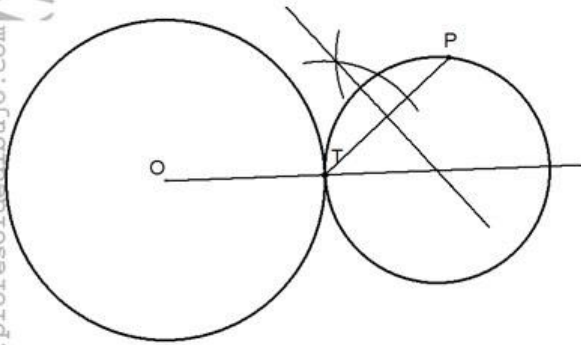
### Ejercicios más complejos de tangencias

(Parten de ejercicios simples, y siempre se dan las mismas relaciones entre elementos vistas hasta ahora)

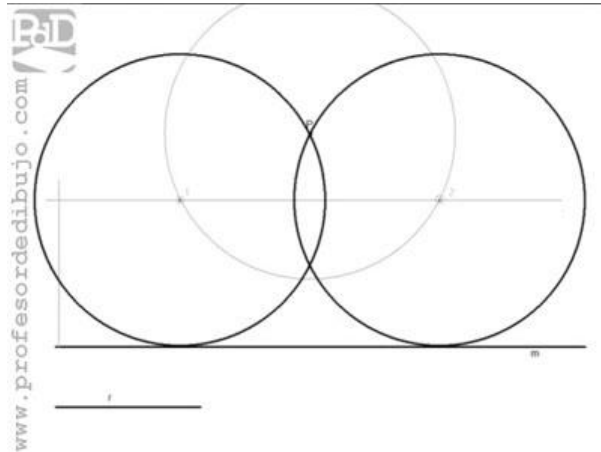
- A- **Circunferencia tangente a una recta, conocido el punto de tangencia y otro punto de la circunferencia.**



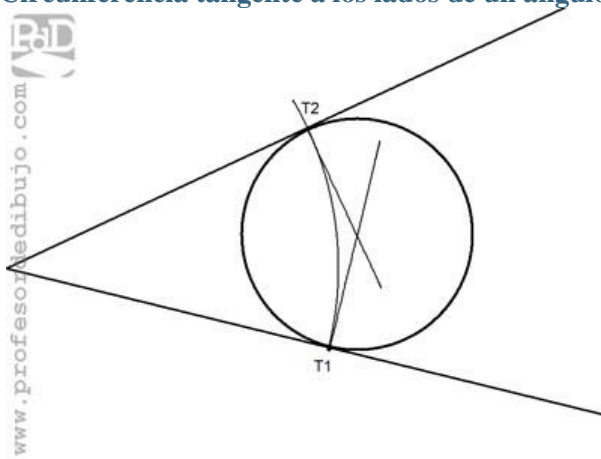
- B- **Circunferencia tangente a otra circunferencia, conocido el punto de tangencia y otro punto perteneciente a ella.**



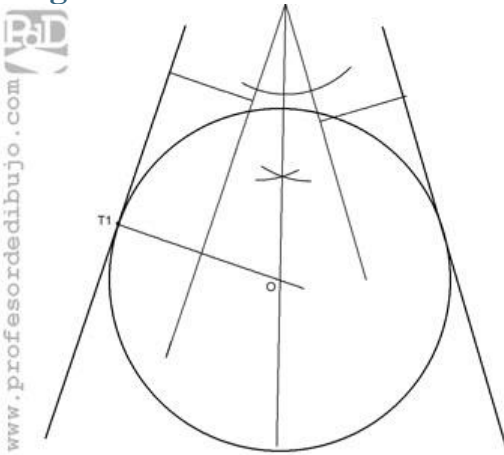
- C- **Circunferencia tangente a una recta, conocido el radio y un punto de la circunferencia.**



D- **Circunferencia tangente a los lados de un ángulo, conocido un punto de tangencia.**

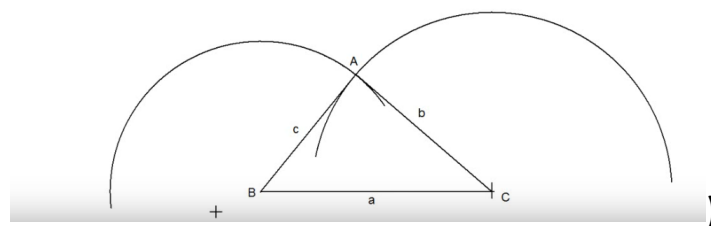
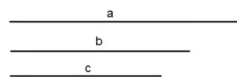


E- **Circunferencia tangente a dos rectas concurrentes, conocido un punto de tangencia.**

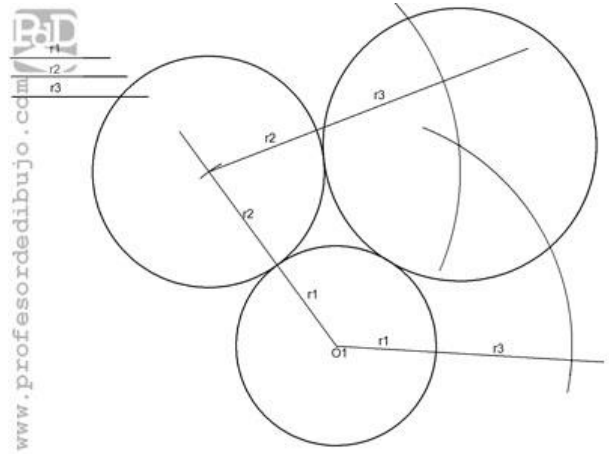


**(Aplicación de construcción de triángulo dados sus tres lados**

<https://www.youtube.com/watch?v=PWmv8jRz-gs>



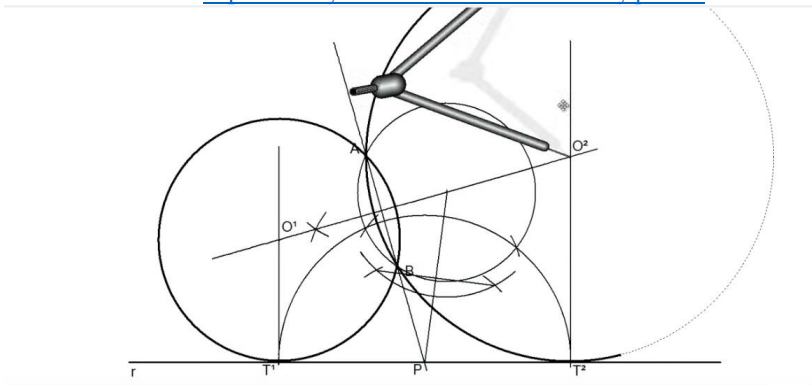
F- **Trazar tres circunferencias tangentes, conocidos sus radios.**



*En los siguientes ejercicios hay que tener presente que el eje radical surge de la recta que une dos puntos de una circunferencia y, en su mediatriz estará la recta donde se encuentran los centros de las circunferencias buscadas. Si nos dan un punto de la circunferencia, el otro necesario será simétrico respecto a una recta (recta haz de centros), dada o no.*

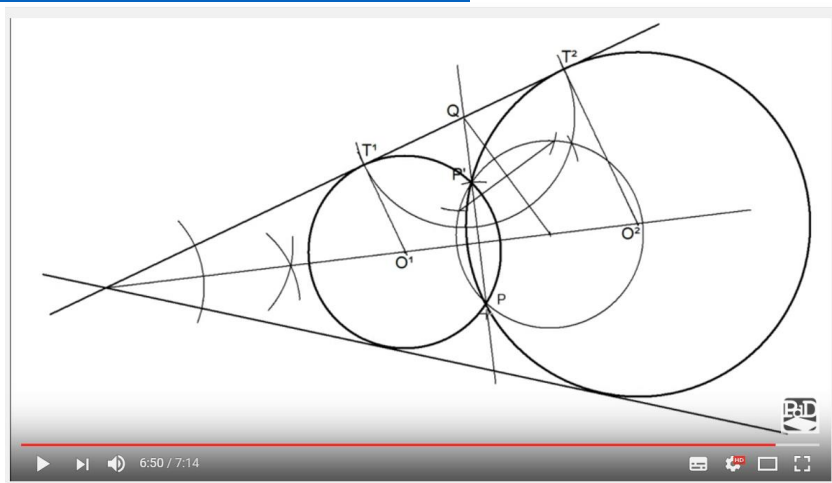
G- **Circunferencias tangentes a una recta pasando por dos puntos**

<https://www.youtube.com/watch?v=mkOKyqktJwU>

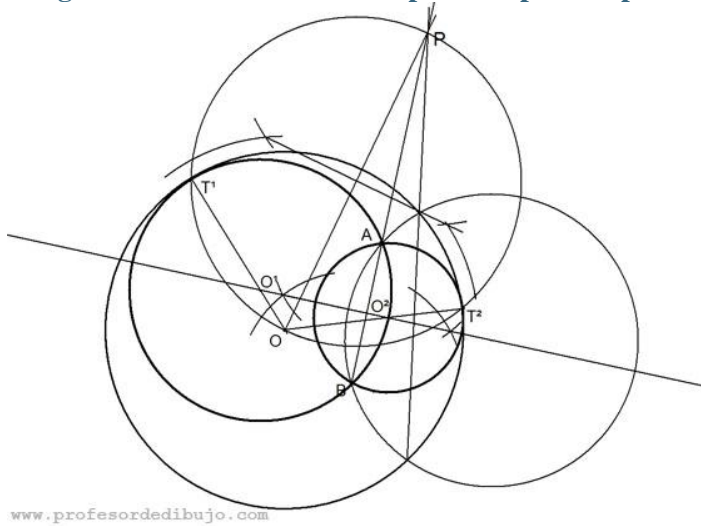


H- **Circunferencias tangentes a dos rectas pasando por un punto**

<https://www.youtube.com/watch?v=i461SAc3Ucc>

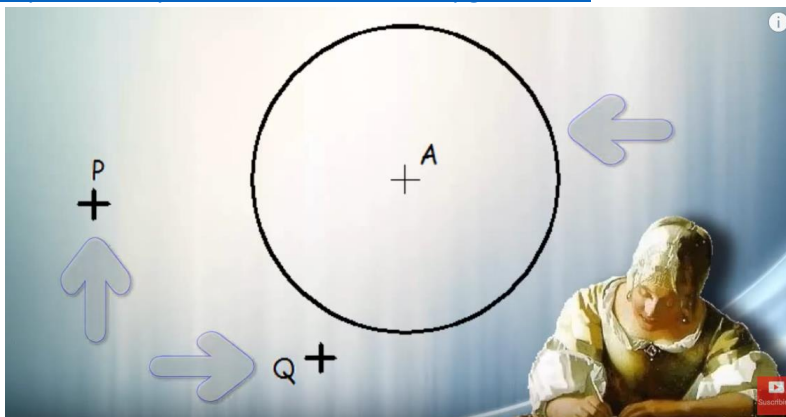


I- **Tangentes a una circunferencia pasando por dos puntos interiores (Potencia).**



Poner Madrid circunferencia tang a circ y pasando por un punto exte y con centro en r

J- *Circunferencias tangentes a una circunferencia y que pasan por dos puntos exteriores*  
<https://www.youtube.com/watch?v=kpgeiwvu1rk>





# ENLACES

SE RECOMIENDO VER ESTOS VÍDEOS PRIMERO:

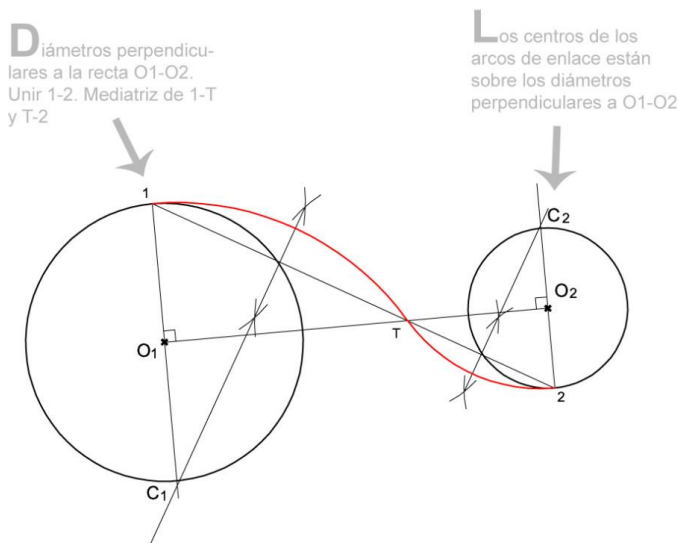
<https://www.youtube.com/watch?v=yMII2jYZ3-w>

<http://es.slideshare.net/mecanismosucr/empalmes-tangentes>

## Enlace de 2 circunferencias mediante 2 arcos de circunferencia tangentes entre sí.

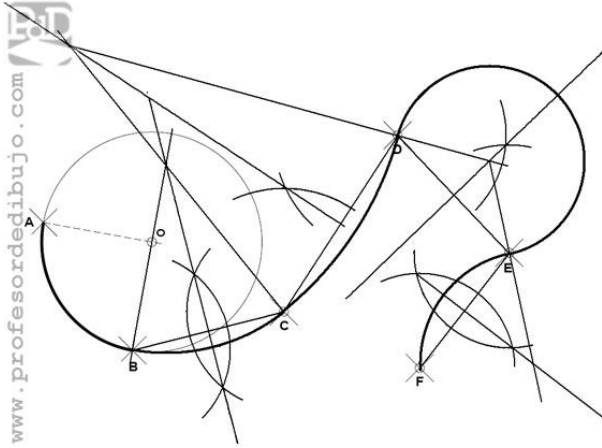
Realizaremos este enlace aplicando la media proporcional.

- Unir los centros de las circunferencias dadas
- Trazar por cada uno de los centros el diámetro perpendicular a la recta anterior.
- Unir los extremos de los diámetros que queremos enlazar (1, 2). Esto nos dará el punto de tangencia T donde los dos arcos se enlazarán.
- Hacer la mediatriz de los segmentos 1-T y T-2. El punto de corte con los diámetros dibujados anteriormente determina los centros de los arcos enlace.

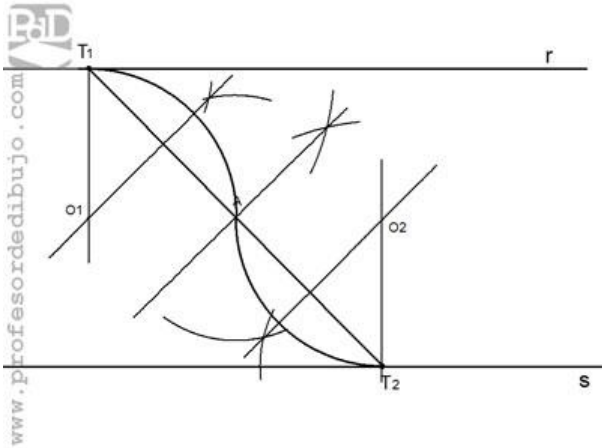


Enlace de 2 circunferencias mediante 2 arcos tangentes entre sí, mediante media proporcional

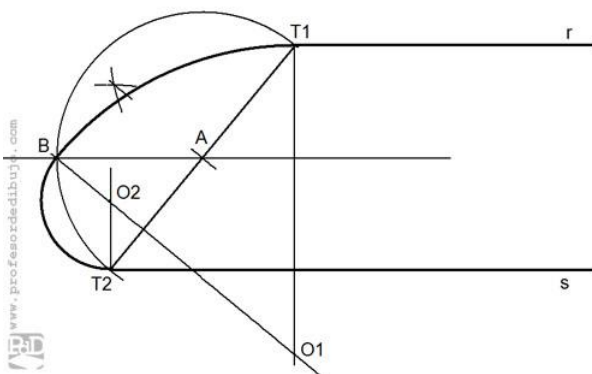
- **Enlace consecutivo de puntos con arcos de circunferencia (línea poligonal).**



- **Enlace entre dos rectas paralelas.**

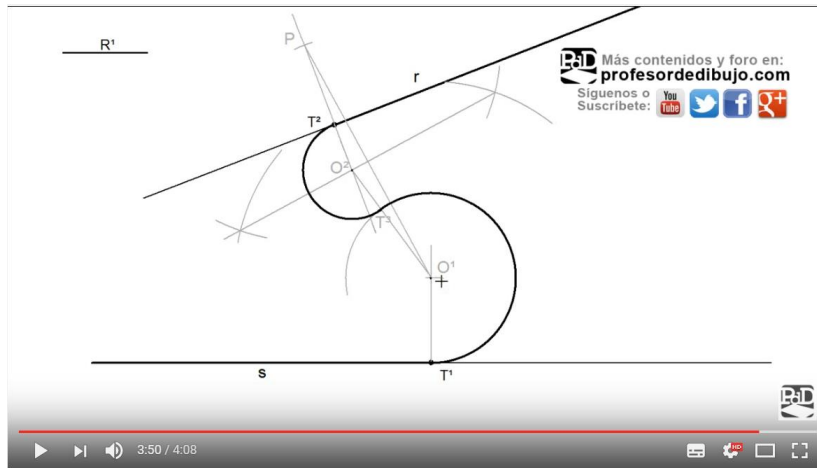


- **Enlace de dos rectas paralelas con dos arcos del mismo sentido, pero distinto radio.**



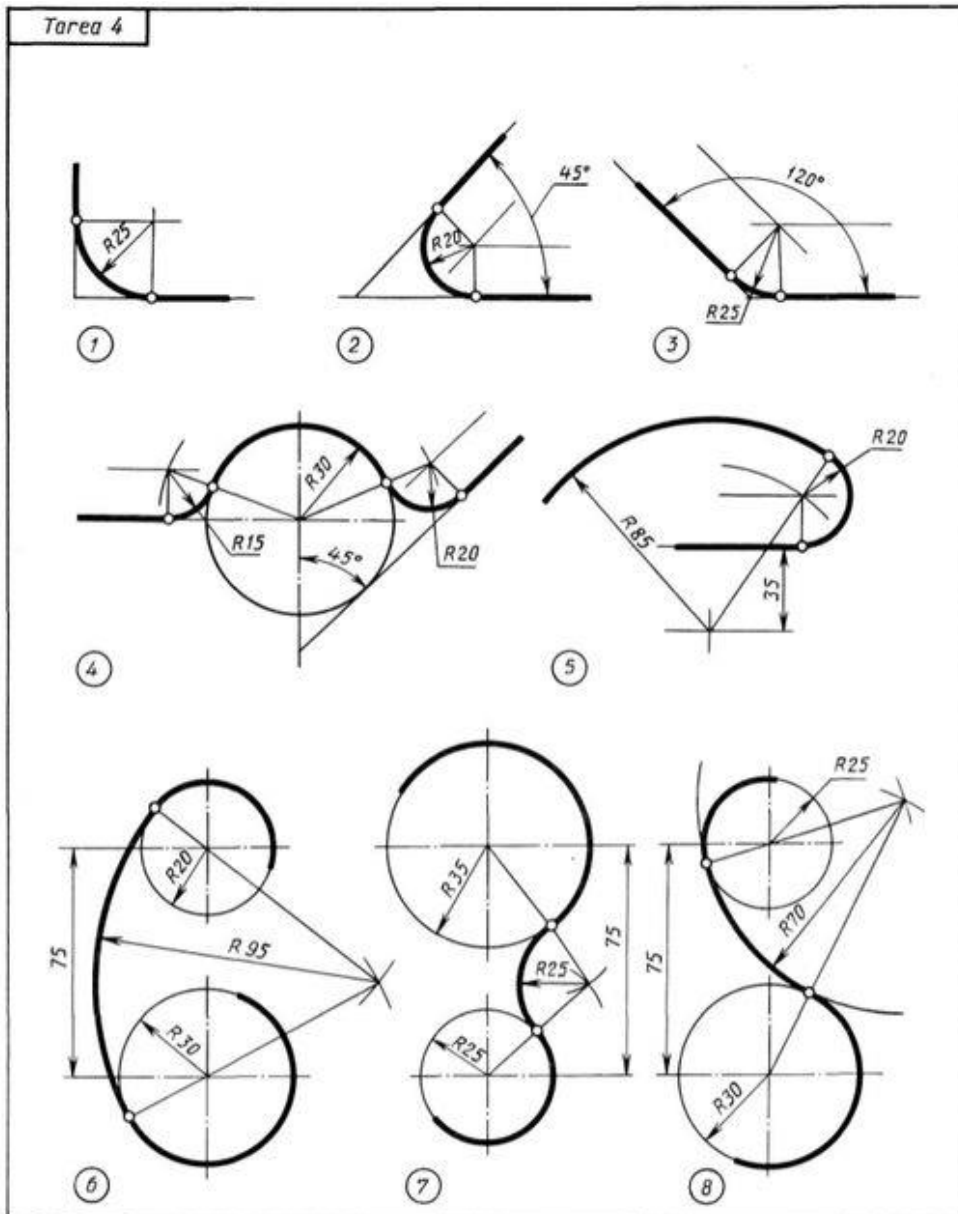
**2. Enlazar dos rectas con dos arcos, dado el radio de uno de ellos y los puntos de enlace en las rectas.**

Actúa, encubierta, la simetría: <https://www.youtube.com/watch?v=Yy1OcS4Xdms>



Enlazar dos rectas con dos arcos, dado el radio de uno y los puntos de enlace en rectas.

### Lámina de enlaces básicos

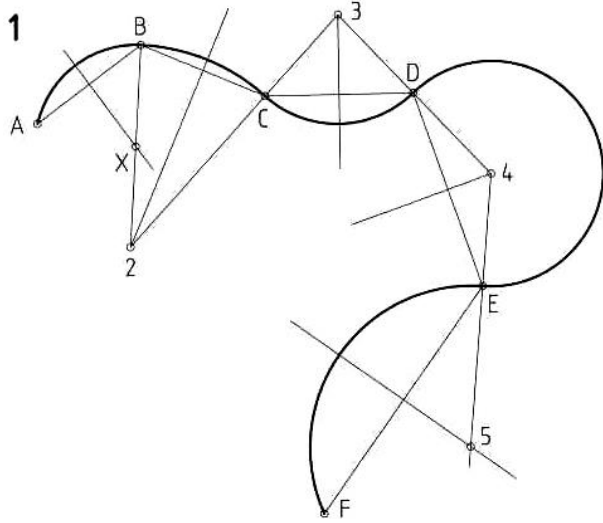


Dibújense las conjugaciones que se muestran poniendo sus dimensiones.

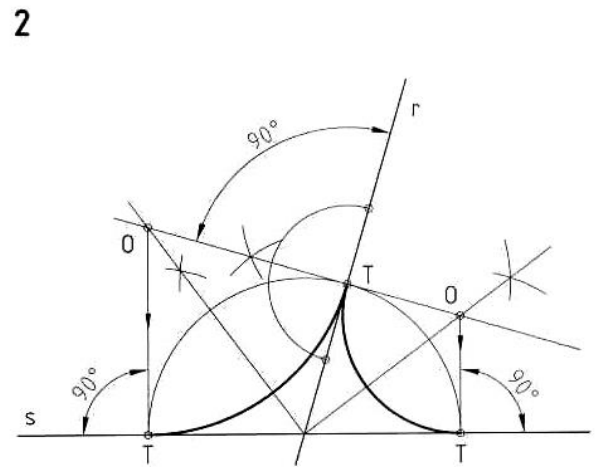
PROF. JOSE MIGUEL ALFARO R.  
ESPECIALIDAD DIBUJO TÉCNICO  
LICEO TECNOLÓGICO DE COPIAPO

## TANGENCIAS -- ENLACES

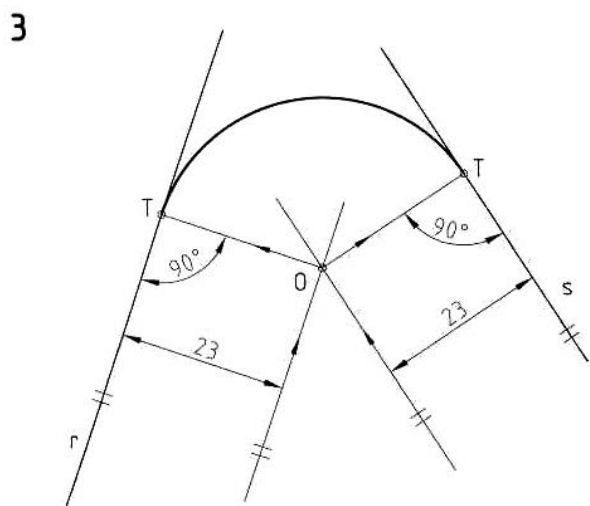
Enlace es un arco de circunferencia que mediante tangencias une dos rectas, una recta y un arco o dos arcos.



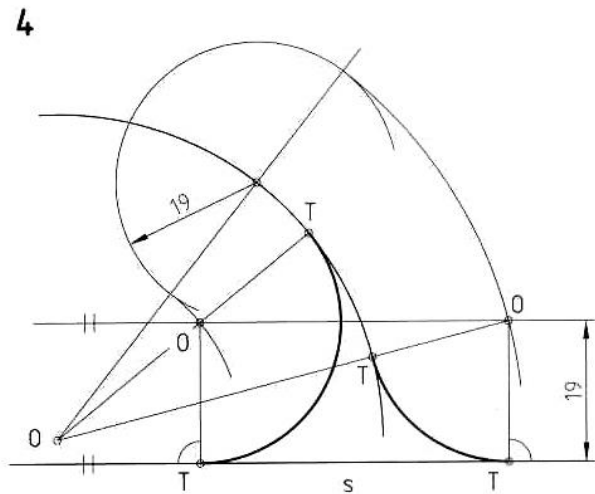
Enlazar los puntos mediante arcos de circunferencia tangentes entre sí.



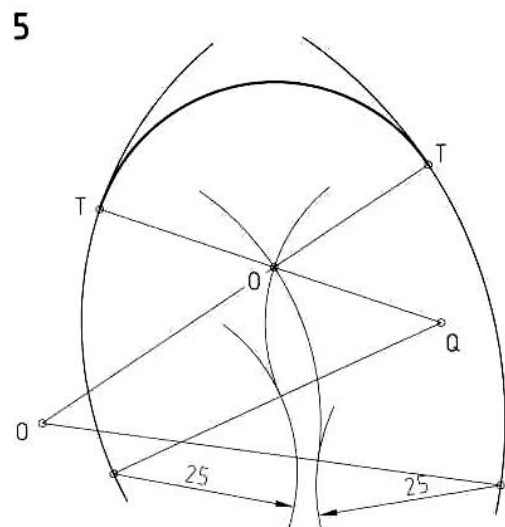
Enlazar las dos rectas con un arco. Se conoce el punto de tangencia en la recta R. Dos soluciones.



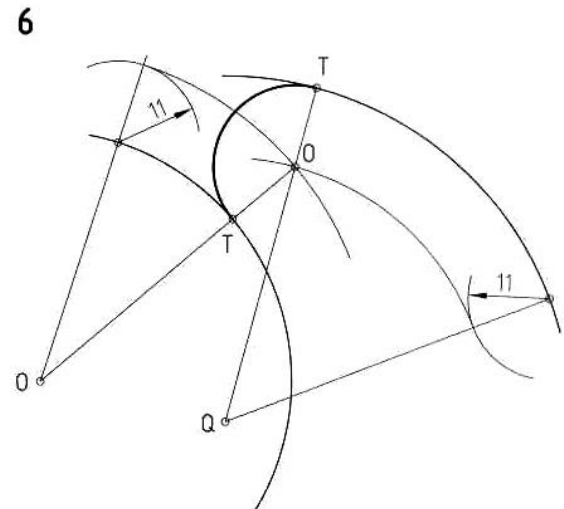
Enlazar las dos rectas con un arco de radio 23 mm.



Enlazar la recta s con el arco dado con dos arcos de radio 19 mm, un de ellos interior, el otro exterior al arco.



Enlazar los dos arcos dados con otro de radio 25 mm.



Enlazar los dos arcos dados con otro de radio 11 mm.

**EJERCICIOS de Enlaces**

1,2,3: <http://www.10endibujo.com/tangencias-ejercicios/>

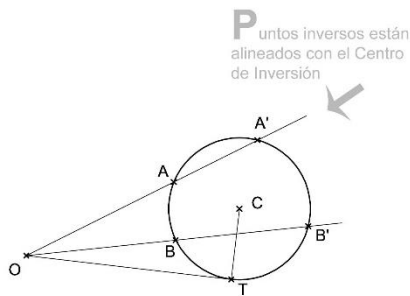
## (INVERSIÓN I)

### RELACIÓN POTENCIA -INVERSIÓN

DEF: La Inversión en Dibujo Técnico es una transformación geométrica en la que a una figura le corresponde otra y en la que se cumple que:

- Dos puntos inversos (A, A') están alineados con un punto fijo llamado Centro de Inversión (O),
- El producto de la distancia (potencia de un punto respecto a una circunferencia) de los puntos respecto al centro de inversión es constante.

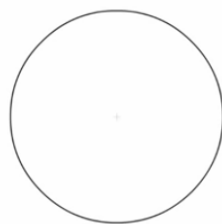
Esto quiere decir que  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OT \cdot OT = K$  por tanto **OT = Raíz cuadrada de K**



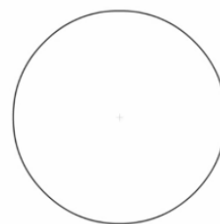
### Características de la Inversión

- 1. Si  $K > 0$ , la Inversión es positiva. Si  $K < 0$ , es negativa y en este último caso la Inversión no tiene puntos dobles.

P



$K > 0$  Inv. +



$K < 0$  Inversa Inv.-

**INVERSIÓN Y HOMOTECIA**

La circunferencia inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia. Esta circunferencia tampoco pasa por el centro y es homotética a la primera.

**INVERSIÓN POSITIVA ( $K > 0$ )  
HOMOTECIA DIRECTA**

**INVERSIÓN NEGATIVA ( $K < 0$ )  
HOMOTECIA INVERSA**

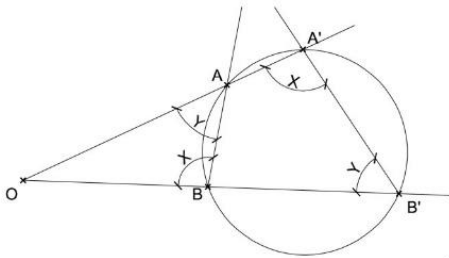
Dos circunferencias son siempre inversas y homotéticas. Siendo el centro de inversión para  $k > 0$  el centro de homotecia directa ( $k > 0$ ) y el centro de inversión negativa para  $k < 0$  el centro de homotecia inversa ( $k < 0$ ).

## 2. Dos pares de puntos inversos no alineados forman siempre una circunferencia

Dados dos puntos  $A, B$  y sus inversos  $A', B'$ , las rectas  $A-A'$  y  $B-B'$  son antiparalelas de las rectas  $A-B$  y  $A'-B'$

**C**aracterística 2:  
Rectas antiparalelas

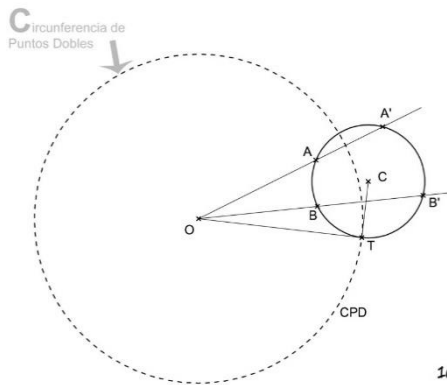
Esto quiere decir que el ángulo que forma la recta  $A-A'$  con  $A'-B'$  y con  $A-B$  son iguales que los que forma la recta  $B-B'$  con  $A-B$  y con  $A'-B'$  respectivamente.



La bisectriz del ángulo que forma el primer par es perpendicular a la bisectriz del otro par de puntos.

Forman el **cuadrilátero cíclico**.

**Circunferencia de Puntos Dobles o Circunferencia de Autoinversión** (la usaremos en el ejercicio 2)



La **Circunferencia de Puntos Dobles** (o **circunferencia de Autoinversión**) es el **Lugar Geométrico** de los puntos del plano que tienen sus inversos en sí mismos. Estos puntos equidistan del Centro de Inversión una distancia igual a la raíz cuadrada de la Potencia de Inversión  $K$ .

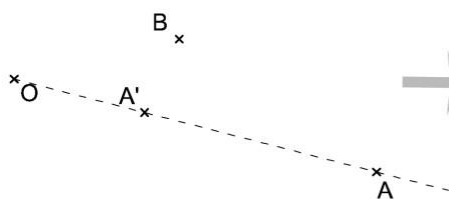
## EJERCICIOS

### Determinar una Inversión

Una Inversión puede venir determinada de 3 maneras diferentes:

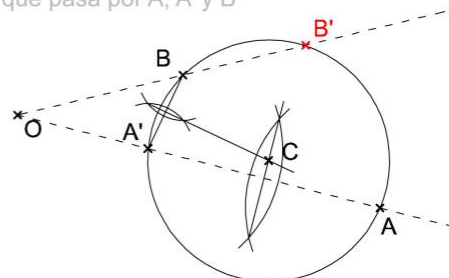
1. Dado el Centro de Inversión  $O$  y un par de puntos inversos  $A, A'$ , determinar el punto inverso de  $B$ .

**E**nunciado



**S**olución

$B'$  está en la circunferencia que pasa por  $A, A'$  y  $B$

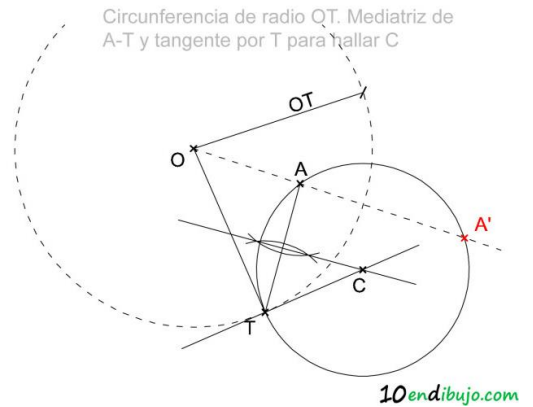


2. Dado el Centro de Inversión O y el valor de la inversión OT, determinar el punto inverso de A

**E**nunciado

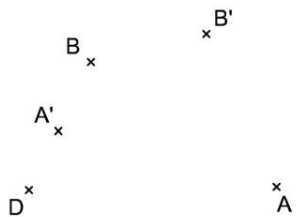


**S**olución



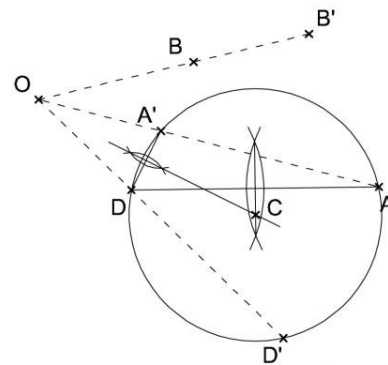
3. Dados dos pares de puntos inversos A, A' y B, B', determinar el punto inverso de D.

**E**nunciado



**S**olución

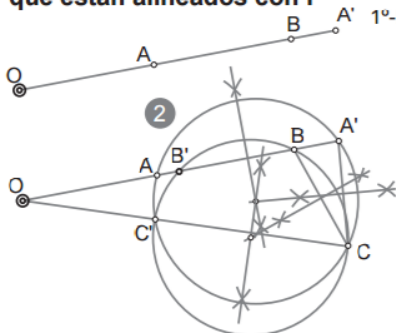
La intersección de A-A' con B-B' da el Centro de Inversión O. D' está en la circunferencia que pasa por A, A' y D.



10endibujo.com

4.

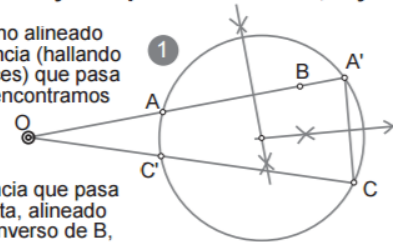
Hallar el punto inverso de B, B', dado el centro de inversión O y dos puntos inversos, A y A' que están alineados con P



1º-Escogemos un punto C al azar, no alineado con AA'. Trazamos la circunferencia (hallando el centro por medio de mediatrices) que pasa por A-A'-C. Alineando O con C encontramos sobre la circunferencia el punto C', inverso de C.

2º-Trazamos la circunferencia que pasa por B, C y C'. Sobre esta, alineado con O encontramos el inverso de B, B'.

Ambas circunferencias cumplen la misma potencia respecto a O, centro de inversión.



	A	B	A'
O+	+	+	+

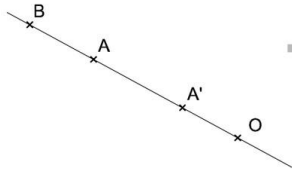


## INVERSIÓN II

### Los 5 casos de inversión

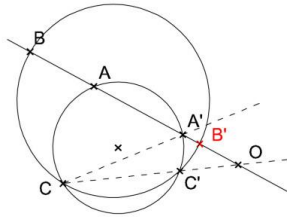
1. La inversa de una recta que pasa por el Centro de Inversión es ella misma.

**E**nunciado



**S**olución

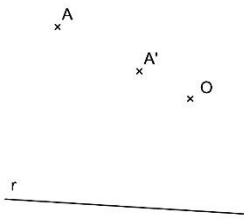
Hallar el inverso de un punto C aleatorio.  
B' está en la circunferencia que pasa por B, C y C'



10endibujo.com

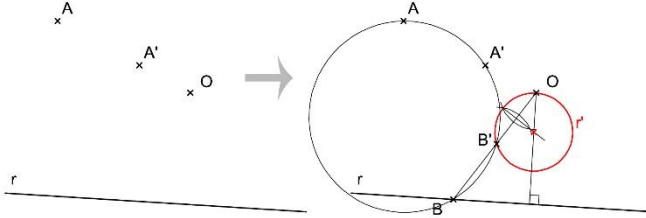
2. La inversa de una recta que no pasa por el Centro de Inversión es una circunferencia que sí pasa por el Centro de Inversión.

**E**nunciado



**S**olución

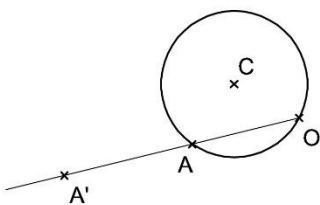
Perpendicular a r por O. Inverso de un punto aleatorio B. Mediatriz de B'-O define el centro de la circunferencia



10endibujo.com

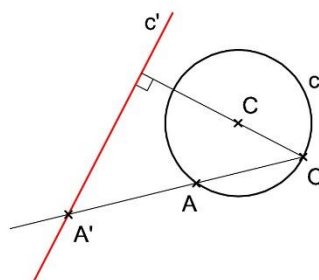
3. La inversa de una circunferencia que pasa por el Centro de Inversión es una recta que no pasa por el Centro de Inversión.

**E**nunciado



**S**olución

Recta C-O y perpendicular por A'



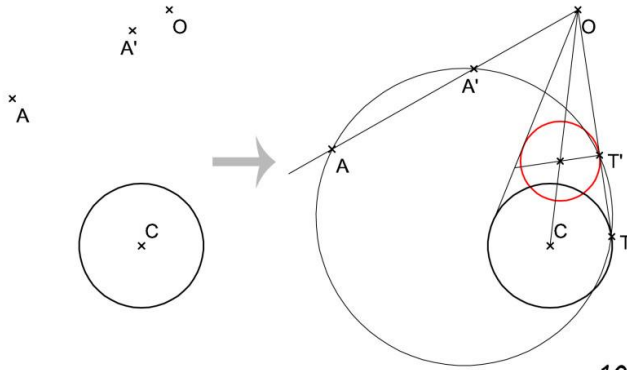
10endibujo.com

**3. La inversa de una circunferencia que no pasa por el Centro de Inversión es otra circunferencia homotética de la primera.**

**E**nunciado

**S**olución

Recta tangente a C desde O. Halla el inverso de T y perpendicular a O-T' por T'. Da el centro de la circunferencia.



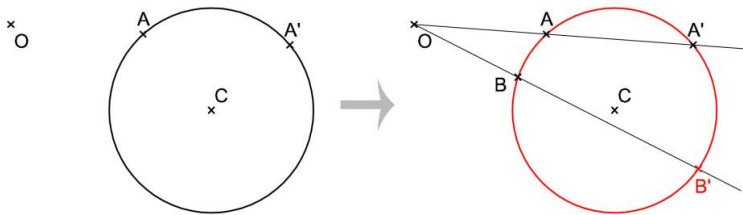
10endibujo.com

**4. La inversa de una circunferencia que pasa por un par de puntos inversos es inversa de sí misma.**

**E**nunciado

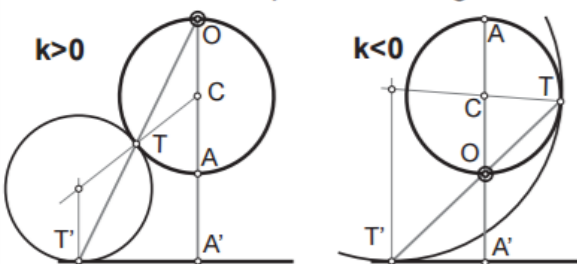
**S**olución

La inversa de una circunferencia que pasa por dos puntos inversos es ella misma



**APLICACIONES EN PROBLEMAS DE TANGENCIAS**

La propiedad fundamental de la inversión para la resolución de problemas de tangencias es que **CONSERVA LOS PUNTOS DE TANGENCIA**: Si dos figuras son tangentes, también lo son sus inversas siendo los puntos de tangencia inversos.



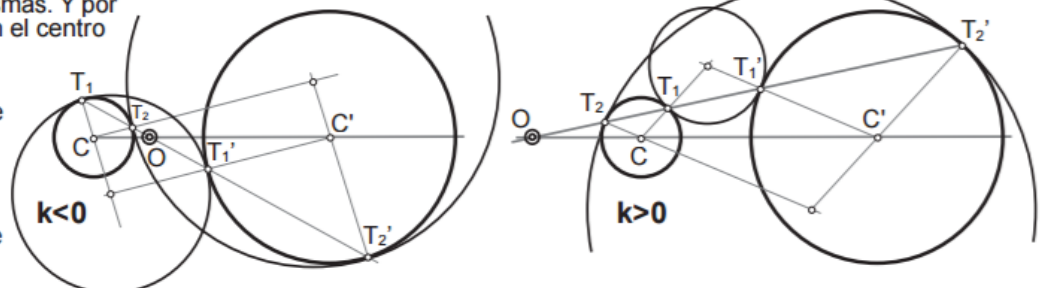
A la izquierda vemos como una circunferencia ha sido transformada en una recta en dos ocasiones, la primera mediante una inversión positiva y la segunda mediante una inversión negativa.

En ambos casos las circunferencias tangentes a ambos elementos son tangentes en puntos inversos.

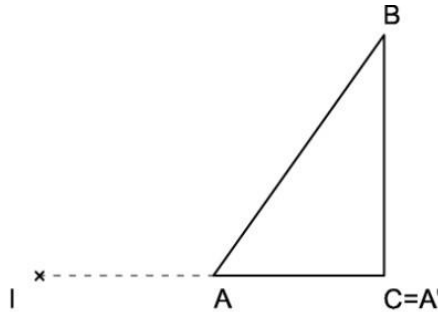
Abajo dichas propiedades son las mismas a diferencia de que las circunferencias han sido transformadas en otras circunferencias.

Los puntos de tangencia son inversos, al igual que las circunferencias en sí mismas. Y por ello están alineados con el centro de inversión.

Cuando la inversión es positiva ambos puntos de tangencia están en el mismo lado respecto al centro de inversión, mientras que si la inversión es negativa se encuentran a distinto lado.



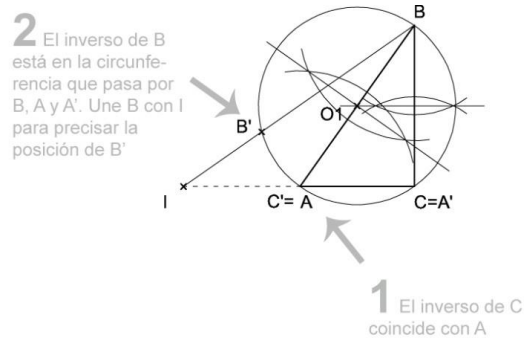
A1. Hallar el inverso del triángulo ABC conocido el centro de inversión I y que el inverso de A es C.



10endibujo.com

Para obtener la figura inversa del triángulo, buscaremos en primer lugar los puntos inversos de sus vértices.

- El inverso de A está sobre C, según el enunciado, es decir  $A' = C$ .
- El inverso de C, por tanto, estará sobre A, es decir  $C' = A$ . Esto se debe a la propiedad de la inversión por la que  $IA \times IA' = IC \times IC'$ . Si IA es igual a  $IC'$ , entonces  $IA'$  debe ser igual, necesariamente a IC.
- Para obtener el punto inverso de B, tenemos que hallar la circunferencia respecto a la cual las potencias de los puntos A,  $A'$ , B y  $B'$  es constante. Para ello, dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A,  $A'$  y B (centro  $O_1$  de la circunferencia en la intersección de las mediatrices). Seguidamente une el punto B con el centro de inversión I y en la intersección con la circunferencia se encontrará  $B'$ .



10endibujo.com

Ahora tenemos que encontrar la figura inversa de cada lado del triángulo.

- La figura inversa de una recta que pasa por el centro de inversión es otra recta. Por tanto, la inversa del lado AC es la recta A'C'.
- La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión será una circunferencia que sí pasa por el centro de inversión.

Por tanto, para hallar la circunferencia inversa de BC, tendremos que encontrar la circunferencia que pasa por B', C' y por el centro de inversión I. Dibuja las mediatrices de los segmentos B'I y C'I. En su intersección estará el centro O2 de la circunferencia.

De igual manera deberás proceder para obtener la circunferencia inversa de la recta AB. Encuentra la mediatriz de A'B'. La mediatriz de B'I ya la has dibujado anteriormente. Dibuja la circunferencia que tiene como centro la intersección O3 de estas dos mediatrices y radio O3-A'.

Lógicamente de las circunferencias halladas sólo tenemos que quedarnos con los arcos situados entre los vértices A', B' y C'.

